四庫全書

子部

欽定四庫全書　子部

厯算全書卷五十八九

詳校官欽天監天文生臣司廷棟

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官編修臣王燕緒

校對官五官靈臺郎臣陳際新

謄録監生臣何以善

繪圖監生臣周馥信

欽定四庫全書

曆算全書卷五十八

幾何補編卷四

宣城梅文鼎撰

方燈

凡燈形内可容立方立方在燈體内必以其尖角各切於八三角面之心

如圖

燈體者立方去其八角也平分立方面之邊為點而聯為斜線則各正方面内成斜線正方依此斜線斜剖而去其角則成燈體矣此體有正方面六三角面八而邊線等故亦為有法之體

凡燈體内可容八等面八等面在燈體内又以其尖角

各切於六方面之心

凡燈體內可容立圓此立圓內仍可容八等面此八等面在立圓內可以各角切立圓之點同會於燈體之六方面而成一點

凡燈體容立圓其內仍可容諸體然惟八等面在立圓內仍能切燈體餘不能也按圓燈在立圓內亦能切燈體與八等面同

凡諸體相容皆有一定比例以其外可知其內

燈體之邊設一百其冪一萬〇倍之二萬開方得一百四十一四二一三為燈之高及其腰廣邊如方面高廣如斜故倍冪求之

以高一百四十一四二一三乘方斜之面冪二萬得二百八十二萬八千四百二十六為方斜之立方積

立方積五因六除得二百三十五萬七千〇二十一為燈積

燈積為立方六之五

以燈積減立積餘四十七萬一千四百〇五為內容八

等面積此八等面在立積內亦在燈積內皆同腰廣同高　其積之比例為立積六之一為燈積五之一

此相容比例

八等面與燈積不惟同高廣亦且同邊故五之一亦即為八等面與燈積同邊之比例也

燈形內容立方其邊為燈體高廣三之二　設燈體邊一百其高廣一百四十一四二一三則內容立方邊九十四二八〇八立方積八十三萬八千〇五十一

燈高廣自乘之冪二萬如左圖甲乙方去其左右各六之一餘三之二如丙丁矩又去其兩端六之一餘三之二如戊正方丙丁矩一萬三千三百三十三三三戊正方八千八百八十八八八為內容正方之一面冪其根九十四二八〇八以根乘面得八十三萬八千〇五十一

依前算八等面體其邊如方其中高如方之斜若以斜徑爲立方則中含八等面體而其體積之比例爲六與一

立方

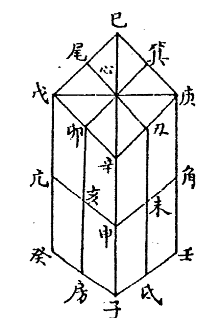
何以言之如巳心辛爲八等面之中高庚心戊爲八等面之腰廣巳庚巳戊戊辛辛庚則八等面之邊也若以庚心戊腰廣自乘爲甲乙丙丁平面又以巳辛心中高乘之爲甲乙丙丁立方（立方一面之形與平面等）則八等面之角俱正切

凡等邊平三角之心依邊剖之皆近大邊三之一燈内容立方之八角皆切於平三角之心燈改立方則所去者皆

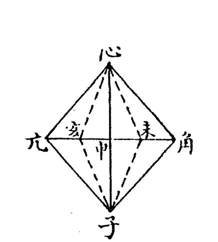
四圜斜面三之一於前形爲六之一四圜皆六之一合之爲三之一而所存必三之二矣

凡立方體各自其邊之中半斜剖之得三角錐八此八者合之卽同八等面體

半立方



八等面



立方之四隅各去一立三角柱則成此體　其積爲立方之半爲八等面之三倍其中仍容一八等面體

八等面體在方柱體内柱形從對角斜線如巳辛戊庚剖至底又從對邊十字線如丑尾卯箕剖至底又從腰線角申亢横

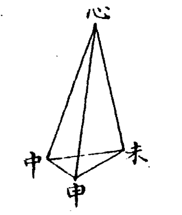
於立方各面之正中而爲立方內容八等面體矣夫巳心辛庚心戊皆八等面巳庚等面爲方之斜也故曰以其斜徑爲立方則中含八等面體也

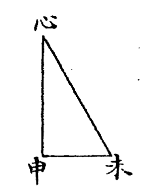
又用前圖甲乙丙丁爲立方之上下平面從巳庚庚辛辛戊戊巳四線剖至底則所存爲立方之半而其所剖三角柱體四合之亦爲立方之半也

半立方

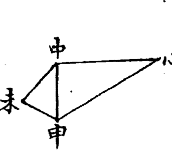
此方柱也其高之度如其方之斜

三角錐



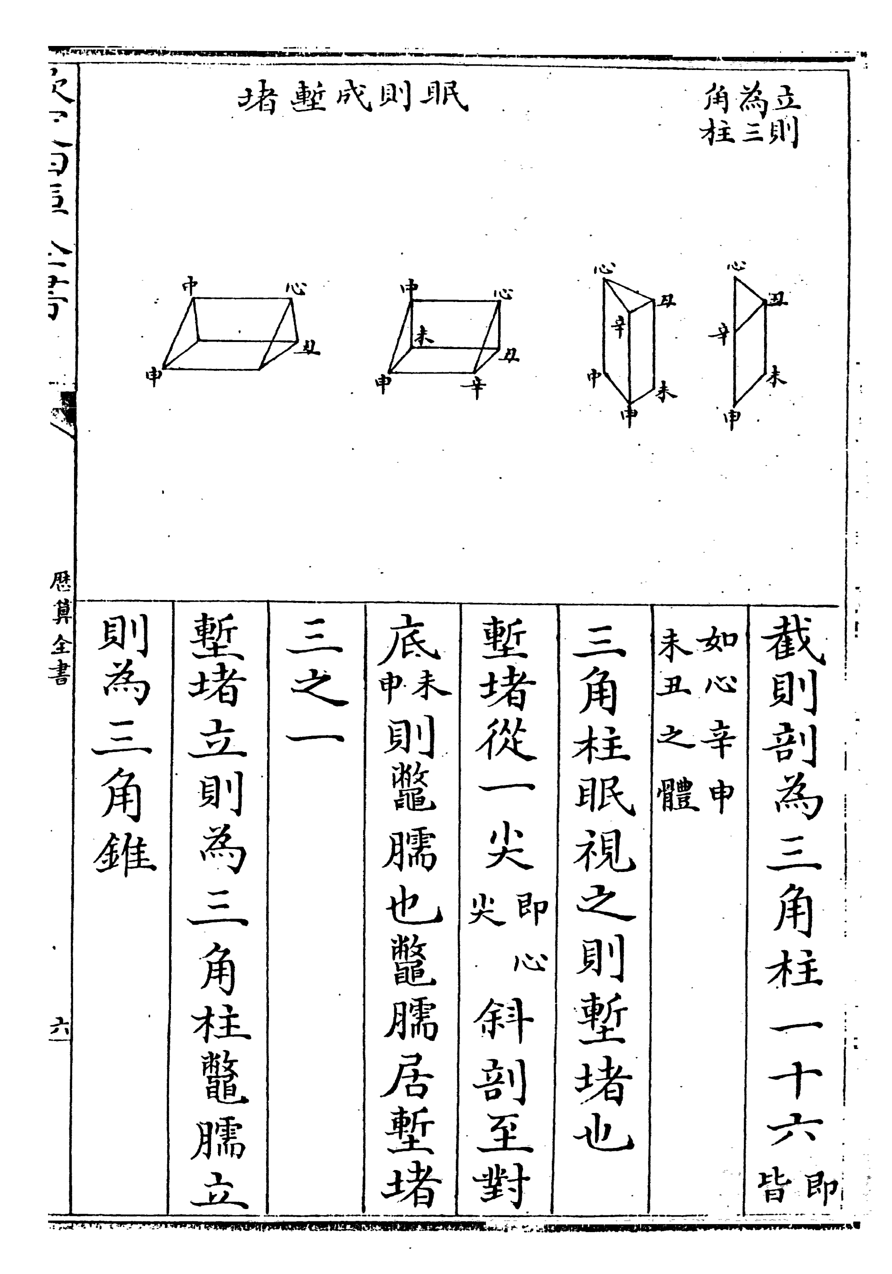


鼈臑



八等面體從尖心剖至對角亦剖至對邊而皆至底子又從腰角申九橫剖之則成三角錐十六

夫方柱為塹堵十六而八等面為鼈臑亦十六則塹堵鼈臑之比例即方柱八等面之比例矣鼈臑為塹堵三之一



截則剖為三角柱一十六即皆如心辛申未丑之體

三角柱眂視之則塹堵也

塹堵從一尖即心尖斜剖至對底未申則鼈臑也鼈臑居塹堵三之一

塹堵立則為三角柱鼈臑立則為三角錐

何以知之立方所去之八角合之即成八等面八等面既為立方六之一則所存燈體為立方六之五矣

燈

凡立方內容燈體皆以燈之邊線為立方之半斜立方內之燈體又容八等面則以內八等面之邊線為立方之半斜與立方竟容八等面無異推此燈內容八等面其邊線必等其中徑亦等

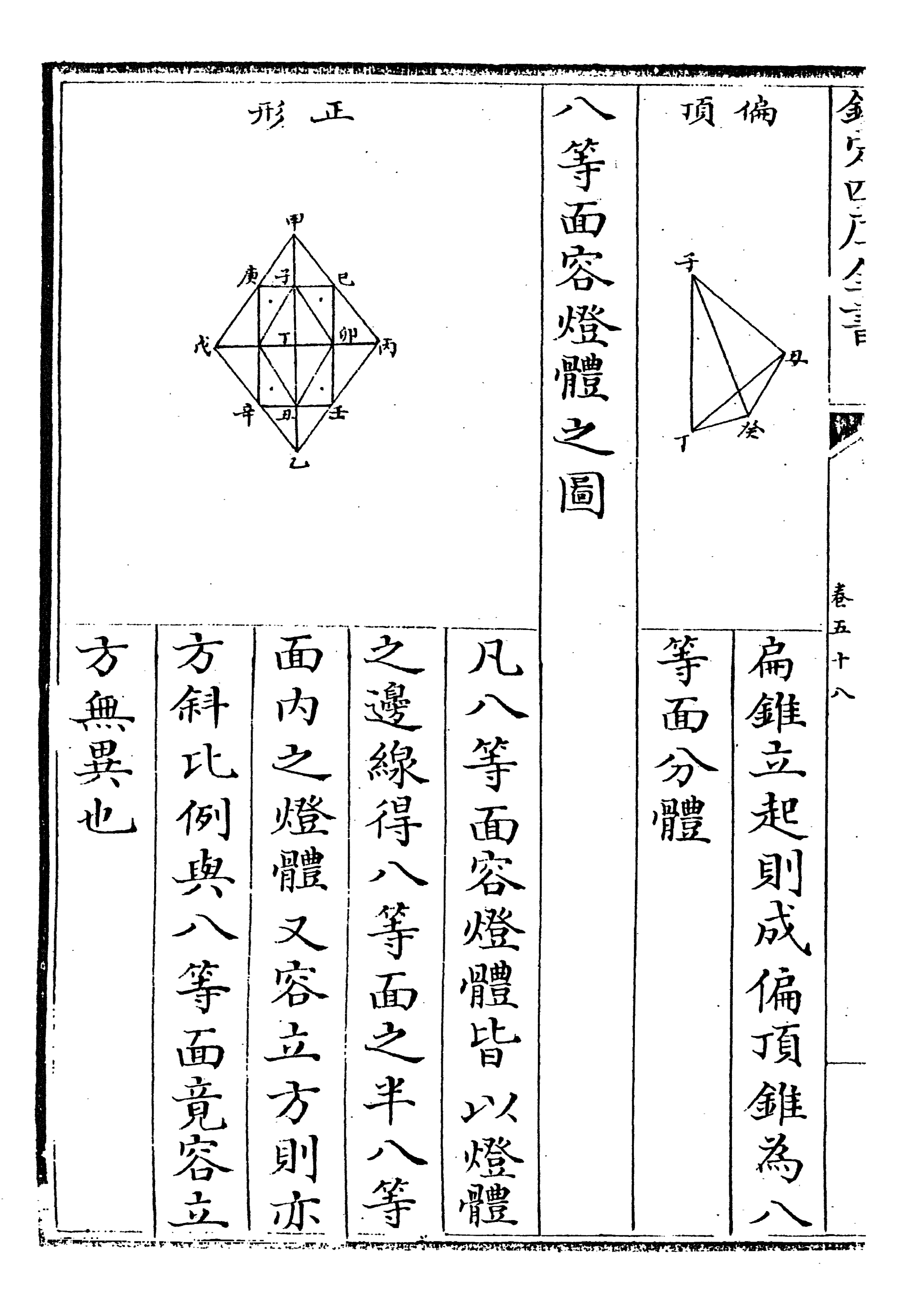
則八等面亦方柱三之一矣方柱者立方之半也八等面既為方柱三之一不得不為立方六之一矣

立方內容燈體

立方

甲庚立方體六面各平分其邊（如壬丑癸卯及子未酉午辰諸點）而斜剖其八角（如從丑癸剖至子從癸卯剖至酉從酉剖至午未則立方去其八角）成燈體

燈體立方六之五



偏錐立起則成偏頂錐為八等面分體

八等面容燈體之圖

凡八等面容燈體皆以燈體之邊線得八等面之半八等面內之燈體又容立方則亦方斜比例與八等面竟容立方無異也

扁

剖立方之角成此

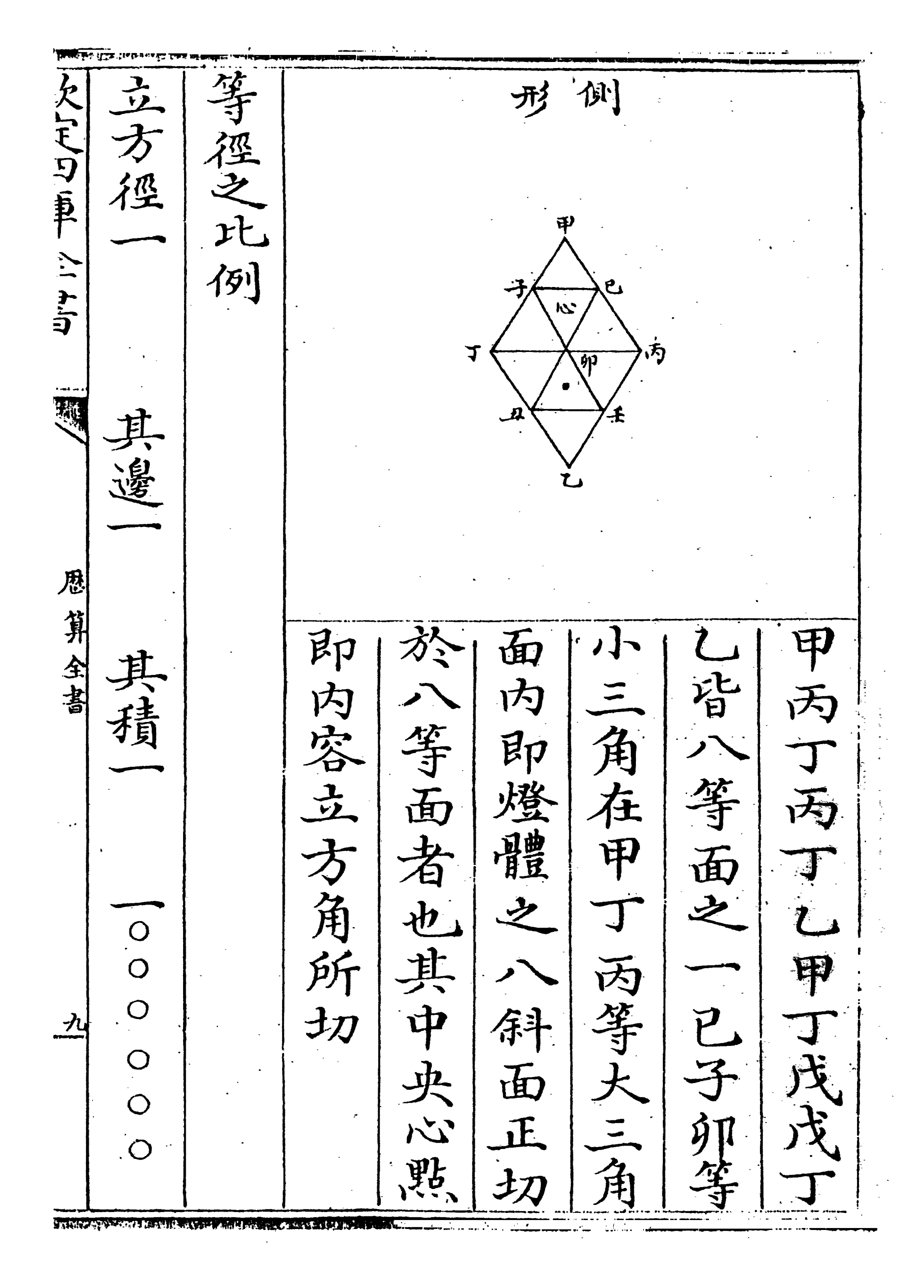
以剖處為底則三邊等以立方之角丁為頂成三角扁錐

內容燈徑一　其邊○七　其積六之五○八三三三○○

內容八等面徑一　其邊○七　其積六之一○二六六六○○

凡立方內容燈體燈內又容立圓圓內又容八等面其切於立方之面之中央凡六處皆同一點若立圓內容燈體燈內又容立方方內又容八等面其相切俱隔遠不能同在一點

凡燈體皆可依楞橫剖如方燈橫剖成六等邊面故其外切立圓之半徑與邊等　如圓燈橫剖成十等邊面



甲丙丁丙丁乙甲丁戊戊丁乙皆八等面之一巳子卯等小三角在甲丁丙等大三角面内即燈體之八斜面正切於八等面者也其中央心點即内容立方角所切

等徑之比例

立方徑一　其邊一　其積一〇〇〇〇〇〇

故其外切立圓之半徑與其邊若理分中末之全分與其大分

凡諸體改為燈皆半其邊作斜線剖之

凡燈體可補為諸體皆依其同類之面之邊引之而會於不同類之面之中央成不同類之錐體乃虛錐也虛者盈之即成原體所以化異類為同體也

如方燈依四等邊引之補其八隅成八尖即成立方

若依三等邊引之補其六隅成六尖即成八等面

如圓燈依五等邊引之補其二十隅成二十尖即成十二等面若依三等邊引之補其十二隅成十二尖即成二十等面

增異類之面成錐則改為同類之面而異類之面隱此化異為同之道也

凡燈體之尖皆以兩線交加而成故稜之數皆倍於尖

方燈十二尖二十四稜

圓燈三十尖六十稜

凡燈體之稜即邊皆可以聯為等邊平面圈　如方燈二

十四稜聯之則成四圈每圈皆六等邊如六十度分圓線　圓燈六十楞聯之則成六圈每圈皆十等邊如三十六度分圓線　此外惟八等邊聯之成三圈每圈四楞成四等面而十二稜成六尖有三稜八觚之正法其餘四等面十二等面二十等面皆不能以邊正相聯為圈

燈體亦有二

其一為立方及八等面所變其體有正方之面六三角

之面八有邊稜二十四而皆同長稜尖凡十有二其一為十二等面二十等面所變其體有五等邊之面十二有三角等邊之面二十有邊楞六十而皆同長稜尖凡三十

立方及八等面所變是刓方就圓終帶方勢謂之方燈十二等面及二十等面所變是削圓就方終帶圓體謂之圓燈方燈為立方及八等面所變其狀並同而比例同

內容燈體之比例也若燈與立方同邊必反小于燈假如燈體邊亦一百則其積二百三十五萬七千〇二十一而立方一百之積只一百萬是反小於燈也

解曰燈體邊一百如前圖之丁壬其外切立方必徑一百四十一四二一三如前圖之丁辛其自乘之冪二萬以徑乘冪得二百八十二萬八四二六為立方積再五因六除得燈積二百三十五萬七千〇二十一

又法以燈邊自乘倍之開方得根仍以根乘倍冪再五因六除

立方

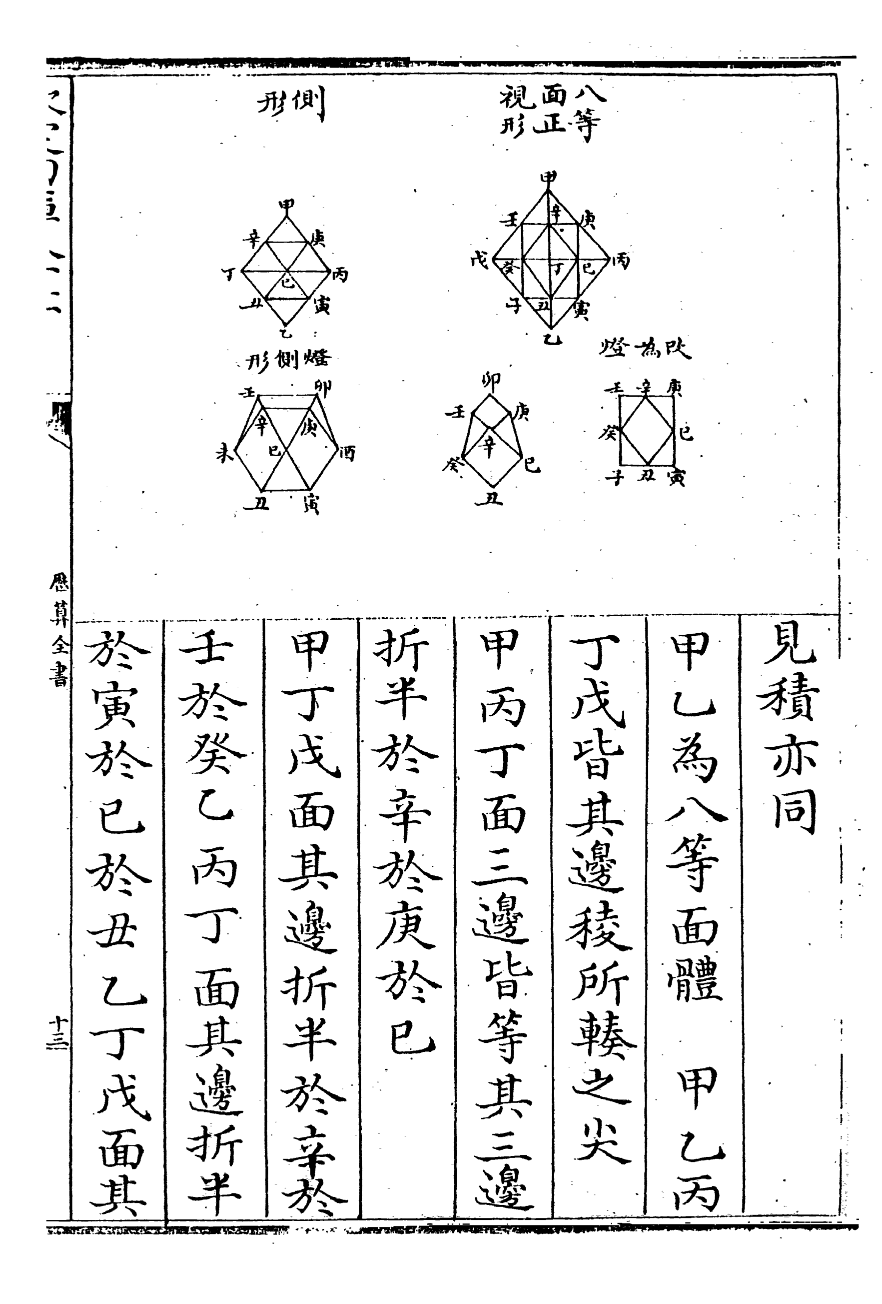
改為燈

甲乙立方體丙丁戊巳庚辛壬癸子皆其邊折半處各於折半點聯為斜線如丙戊丙巳等依此燈體斜線剖而去其角則成燈形矣

燈形之丁辛高丙丁濶皆與立方同徑　其邊得立方之半斜假如立方邊丁辛一百則燈體邊丁壬七十有奇　其積得立方六之五假如立方邊一百其積百萬則燈體邊七十有奇其積八十三萬三千三百三十三三三　此為立方

邊折半於丑於癸於子各以折半點聯為斜線則各成小三等面如甲丙丁面內又成庚辛巳三等邊面其邊皆半於原邊如庚辛得丁丙之半餘三邊同各自其小三角之面之邊剖之而去其錐角則成燈形矣

如依辛巳巳丑丑癸癸辛四邊平剖之而去其丁角以丁角為尖辛巳丑癸為底成扁方錐甲丙乙戊尖並同則所剖處成辛巳丑癸平方面去甲壬辛庚錐戊卯壬辛庚面去丙庚巳寅錐戊庚酉寅巳面並同一法餘可類推

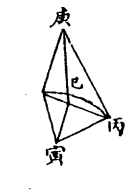


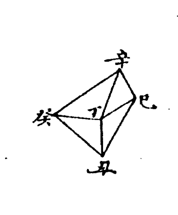
見積亦同

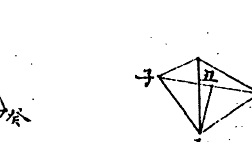
甲乙為八等面體　甲乙丙丁戊皆其邊稜所輳之尖

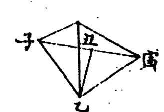
甲丙丁面三邊皆等其三邊折半於辛於庚於巳

甲丁戊面其邊折半於辛於壬於癸乙丙丁面其邊折半於寅於巳於丑乙丁戊面其









何以知之曰同類之體積以其邊上立方積為比例故邊得二之一其積必八之一也

今所剖去之各尖俱以平方為底而成方錐兩方錐合為一八等面體皆等面等邊與原體為同類而其邊正得原邊二之一則其積為八之

八等面體有六角皆依法剖之成平方面六而剖之後各存原八等面中小三角等邊面八與立方剖其八角者正同

燈形之高濶皆得八等面之半

如辛丑高得甲乙之半

己癸濶得丙戊之半

其邊亦為八等面原邊之半

其積得八等面八之五

一也　原體六尖各有所成之錐體皆相等合之成同類八等面之體凡三其積共為原積八之三以為剖去之數則所存燈體得八之五也

如上圖甲乙二錐合為八等面體一丙戊二錐合為八等面體一　丁尖及所對之尖共二錐合為八等面體一　通共剖去同類之形三

假如八等面之邊一百則其積四十七萬一千四百〇四其所容燈體邊五十其積必二十九萬四千六百二

十七五　以八等面積五因八歸之見積

或用捷法竟以十六歸進位所得燈積亦同

右法乃八等面內容燈體比例也

若燈體之邊與八等面同大則其積五倍大於八等面

假如燈體邊一百則其積二百三十五萬七千〇二十

以八等面邊一百之積四十七萬一千四百〇四加五

倍得之　此法則燈體與八等面同為立方所容之比

例亦即為燈內容八等面之比例

准此而知燈内容八等面八等面又容燈則内燈體為外燈體八之一

燈體内容八等面　五之一　用畸零乘法化大分為小分以八等面母數八乘五之一

八等面内容燈體　八之五　得八乘母數五得四十

外燈體四十　八等面體八　内燈體五　合之為内體得外體四十之五約為八之一

又八等面容燈燈又容八等面内八等面亦為外八等面八之一　其體之比例既同則其所容之比例亦同也

立方内容燈體　燈内又容立方則内立方邊得外立方邊三之二内立方積得外立方積二十七之八

以三之二自乘再乘為三加之比例也

一百六十二　六之五　一百三十五

二十七之八　四十八

准此而知燈内容立方則内立方積得燈積一百三十五之四十八　若燈容立方立方又容燈則内燈積亦為外燈積二十七之八其為所容者之比例即能容者之比例故也

求丙戊中長線

以戊丁冪三因之為丙戊冪平方開之得六十一二三七二為丙丁乙等邊三角形中長線

求甲己中高線

法以戊丁冪一千二百五十取三之一為己戊冪四百一十六六六六六與甲戊冪即丁戊冪相減餘八百三十三三三三三為甲己中高冪開方得甲己中高二十八八六七五

又以己戊冪開方得己戊二十〇四一二四以己戊二十〇四一二

求方燈所去錐體

三角錐稜皆五十即原邊之半甲乙甲丙甲丁底之邊皆七十○七一○七即燈體之邊丙乙乙丁丁丙其半三十五三五五三乙戊戊丁

求甲戊斜垂線

法曰乙丁為甲乙之方斜線則甲戊為半斜與乙戊戊丁等皆三十五三五五三其冪皆一千二百五十

四乘戊丁三十五三五五三得七百二十一六八六五又三因之得二千一百

六十四〇五七五為乙丙丁三等邊冪

又以中高甲巳二十八八六七五乘之得數三除之得三角錐

積二萬〇八百二十三六六三五又八乘之得一十六萬六

千五百八十七〇三為所去八三角錐共積即立方一百

萬六之一與前所推合本該一十六萬六千六百六十六六六六不盡因積算尾數有欠

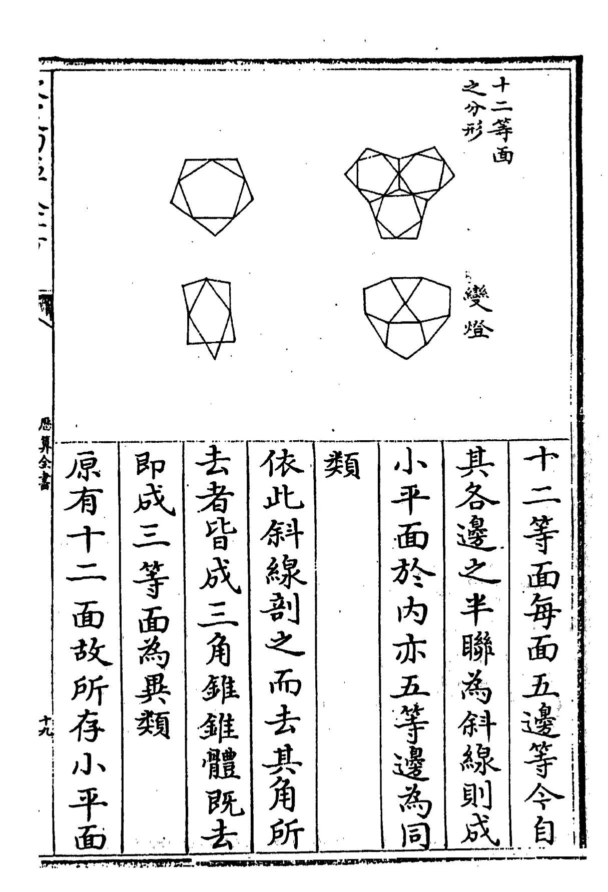
然不過萬分之一耳

圓燈為十二等面二十等面所變體勢並同而比例亦

別

公法皆於原邊之半作斜線相聯則各平面之中成小平面此小平面與原體之平面皆相似即為内容燈體之面　依此小平面之邊平剖之去原體之鋭角此所去之鋭角皆成錐體錐體之底平割錐體則原體挫鋭為平亦成平面於燈體原有若干鋭亦成若干面而與先所成之小平面不同類然其邊則同

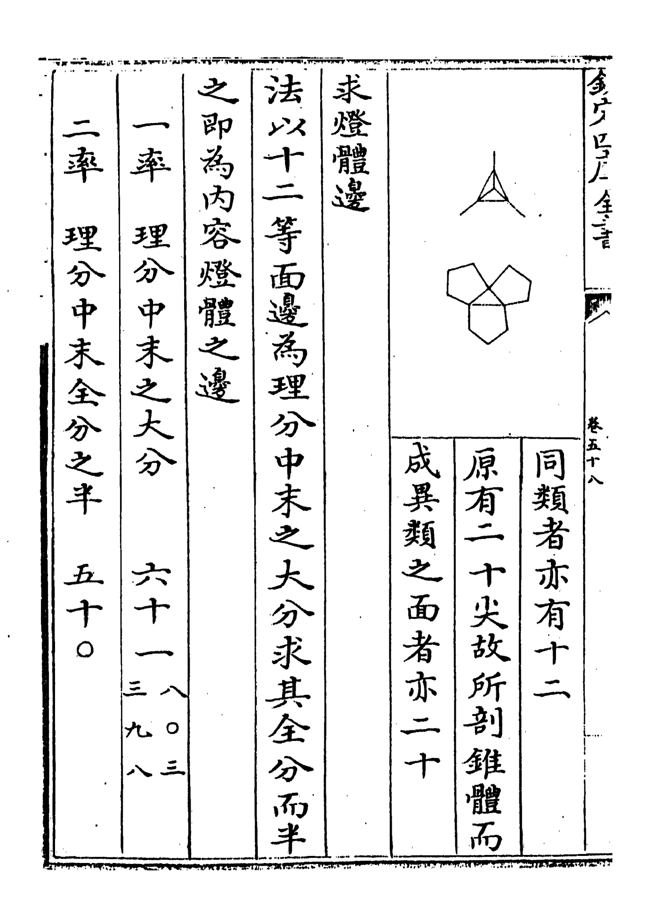
如圖



十二等面每面五邊等今自其各邊之半聯為斜線則成小平面於内亦五等邊為同類

依此斜線剖之而去其角所去者皆成三角錐錐體既去即成三等面為異類

原有十二面故所存小平面



同類者亦有十二

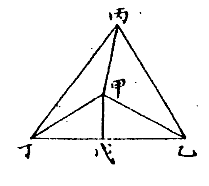
原有二十尖故所剖錐體而成異類之面者亦二十

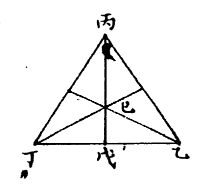
求燈體邊

法以十二等面邊為理分中末之大分求其全分而半之即為內容燈體之邊

一率　理分中末之大分　六十一八〇三三九八

二率　理分中末全分之半　五十〇





法當以所得戊巳自乘為句冪用減甲戊冪餘為甲巳冪開方得一十七八四一一為中高

令改用捷法省求丙辛取戊丙冪九之一為戊巳冪戊巳為戊丙三之一故其冪為九之一得五百四十五四二三七

或徑用戊丁冪三之一亦同

三率　十二等面之邊　一百〇〇

四率　内容燈體之邊　八十〇九〇一七

燈體邊原為大橫線之半十二等面邊與其大橫線若小分與大分則亦若大分與全分也而十二等面邊與燈邊亦必若大分與全分之半矣

甲　丙　辛　巳　戊

甲　巳　戊

總乘較為實戊丙底為法法除實得丙辛以丙辛減戊丙得戊辛折半為戊巳

解曰原以戊丁冪減甲丁冪得甲戊冪復以戊丁冪三之一減甲戊冪得甲巳冪今以戊丁三分加一而減甲丁冪即徑得甲巳冪其理正同

前之捷法有求丙辛及較總相乘後用底除諸法可謂捷矣今法徑不求甲戊斜垂線捷之捷矣凡三角錐底潤等者當以為式

訂定三角錐法 圓燈所去

用捷法以戊丁冪三分加一減甲丁冪為甲巳冪

又捷法不求甲戊斜垂線但以戊丁冪三分加一以減甲丁即甲丙或甲乙冪為甲巳冪開方即得甲巳中高比前法省數倍之力

戊丁冪　一千六百三十六二七一二

三之一　五百四十五四二三七

併得　二千一百八十七六九四九

甲丁即甲丙冪　二千五百〇〇

相減餘甲乙冪　三百一十八三〇五一　與前所得同

冪丙乙丁得三角柱積五萬〇五百六十三五二九三三除之得錐積一萬六千八百五十四五〇九七又以二十乘之為燈體所去之積三十三萬七千〇九十〇一九四〇

十二等面邊設一百前推其積為七百六十八萬三千二百一十五令減去積三十三萬七千〇九十存燈積七百三十四萬五千一百二十五　內容燈體邊八十〇九〇一七

依測量全義凡同類之體皆以其邊上立方為比例可

甲丁甲乙甲丙皆設五十

丙丁丁乙乙丙皆八十〇九〇一七其

半戊丁戊乙四十〇四五〇八半

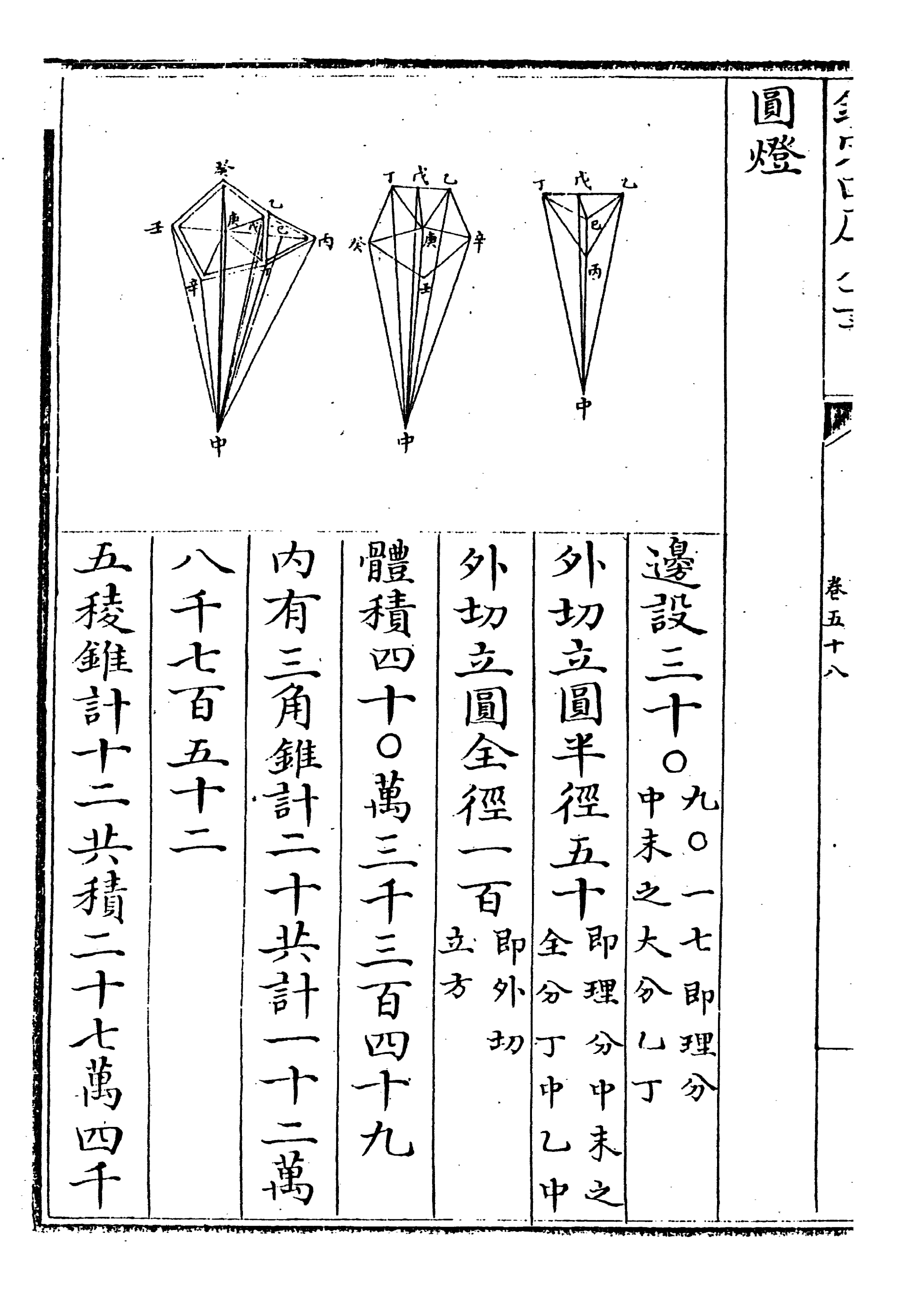
丙戊七十〇〇六二九為底之垂線

甲巳一十七八四一一為中高

丙乙丁底冪二千八百三十四一〇三八

法以半邊戊丁乘中長丙戊得底冪丙乙丁以中高甲巳乘底

圓燈



邊設三十〇九〇一七即理分中末之大分乙丁

外切立圓半徑五十即理分中末之全分丁中乙中

外切立圓全徑一百即外切立方

體積四十〇萬三千三百四十九

內有三角錐計二十共計一十二萬

八千七百五十二

五稜錐計十二共積二十七萬四千

以推知二十等面所變之燈體

二十等面邊設一百則燈體之邊五十

捷法求得一百七十三萬三千九百四十八為設邊五十之燈積

一　燈體邊八十〇九〇一七之立方五十二萬九千〇百〇八五

二　燈體積七百三十四萬五千一百二十五

三　燈體邊五十之立方一十二萬五千

四　燈體五十之積一百七十三萬三千九百四十八

五百九十六

丁中丙乙三角錐為圓燈分體之一　乙丁丙三等邊面己為平面心　中為體心　中己為分體之中高

戊丁為半邊丁中自體心至角線為分體之稜　戊中為斜垂線

乙癸中辛五稜錐亦圓燈分體之一　乙丁癸壬辛五等邊面庚為平面心　中庚為分體中高　其戊丁半邊丁中分體稜戊中斜垂線與前三角錐皆同一線

何以知兩種錐形得同諸線乎曰乙戊丁邊兩種分體所同用而兩種錐體皆以體心中為其頂尖故諸線不得不同觀上圖自明

先算三角錐共二十

半邊一十五四五〇八五戊丁冪二百三十八七二八七

平面容圓半徑即戊巳〇八九一〇五其冪七十九五七六二用捷法取戊丁冪以三除得之

平面積乙丙丁面四百一十三四八七九

中高即巳中四十六七〇七五本法以戊丁冪減丁中冪為戊中冪又以戊丁冪三之一當戊巳冪減之為巳中冪今徑以戊丁冪加三之一減丁中冪為巳中是捷法也

三角錐積六千四百三十七六六二〇

二十錐共積一十二萬八千七百五十三三四

次算五稜錐共十二

半邊一十五四五〇八五戊丁

半周七十七二五四二五用半邊五因得之

平面容圓半徑二十一二六六三戊庚

五等邊平積一千六百四十二九一二〇

中高四十一七八五三庚中

五稜錐積二萬一千九百六十二六六

十二錐共積二十七萬四千五百九十六

求戊庚半徑

一率　三十六度切線　〇七二六五四

二率　全數　一〇〇〇〇〇

三率　半邊戊丁　一十五四五八五

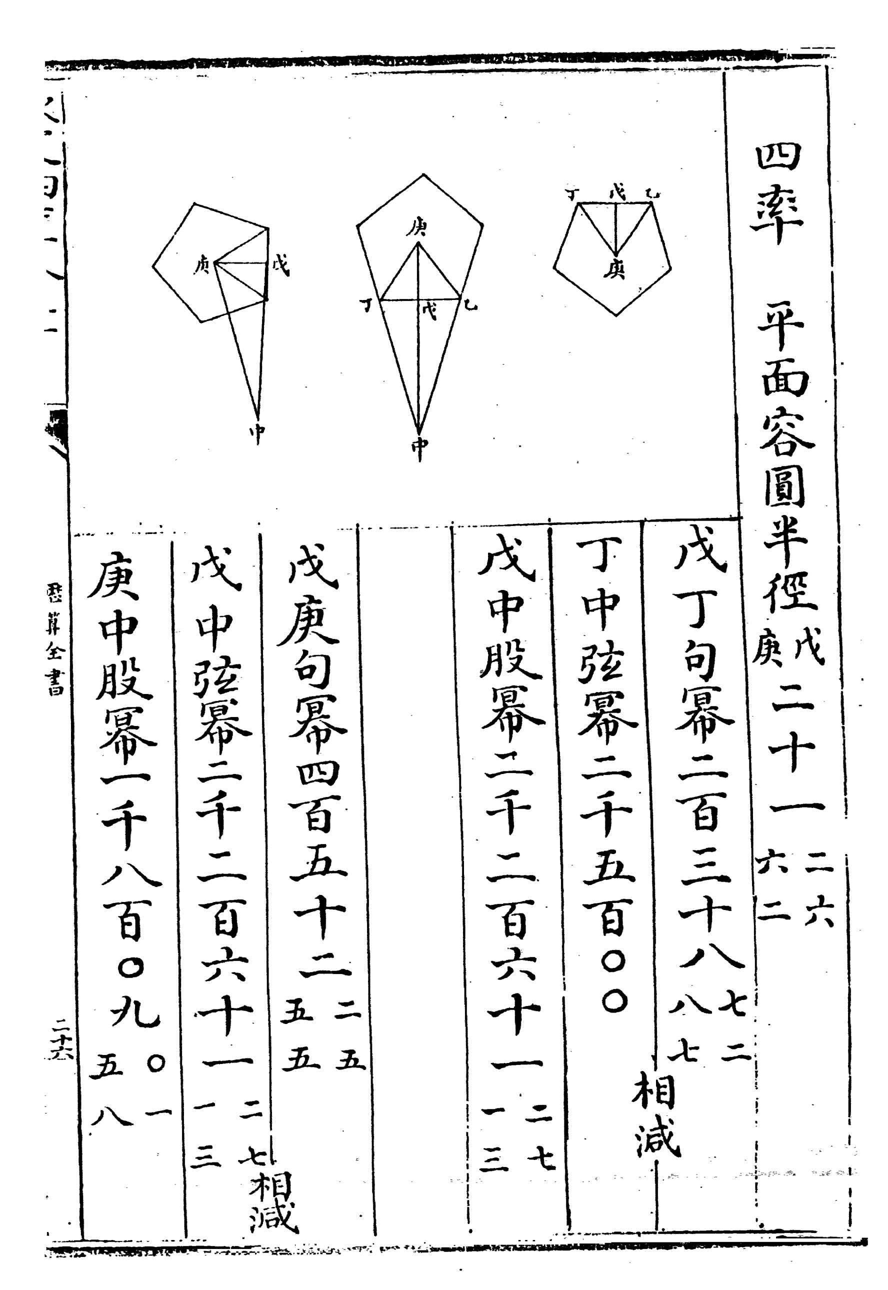
戊丁半邊冪四因之為全邊三十〇九〇一七之冪

一　燈體邊五十之立方一十二萬五千

二　燈體邊五十之體積一百七十三萬三千九百四十八

三　燈體邊三十〇九〇一七之立方二萬九千五百〇八四九八七

四　燈體邊三十〇九〇一七之體積四十〇萬九千三百二十九與細推者只差五千九百八十為八十分之一



四率　平面容圓半徑戊庚二十一二六六二

戊丁句冪二百三十八七二八七　相減

丁中弦冪二千五百〇〇

戊中股冪二千二百六十一二七一三

戊庚句冪四百五十二二五五五

戊中弦冪二千二百六十一二七一三　相減

庚中股冪一千八百〇九〇一五八

又可變為二十四等面體面面皆三邊凸邊二十四凹邊十二十字之交六凡八角如蒺藜形

六等面體又可變三十六等邊體為八邊之面六為三邊之面八凡二十四角

八等面體亦可變三十六等邊體為六邊之面八為四邊之面六凡二十四角

又可變四十八等邊體為四邊之面十八為三邊之面八凡二十四角

柱積六萬八千六百四十九

錐積二萬二千八百八十三

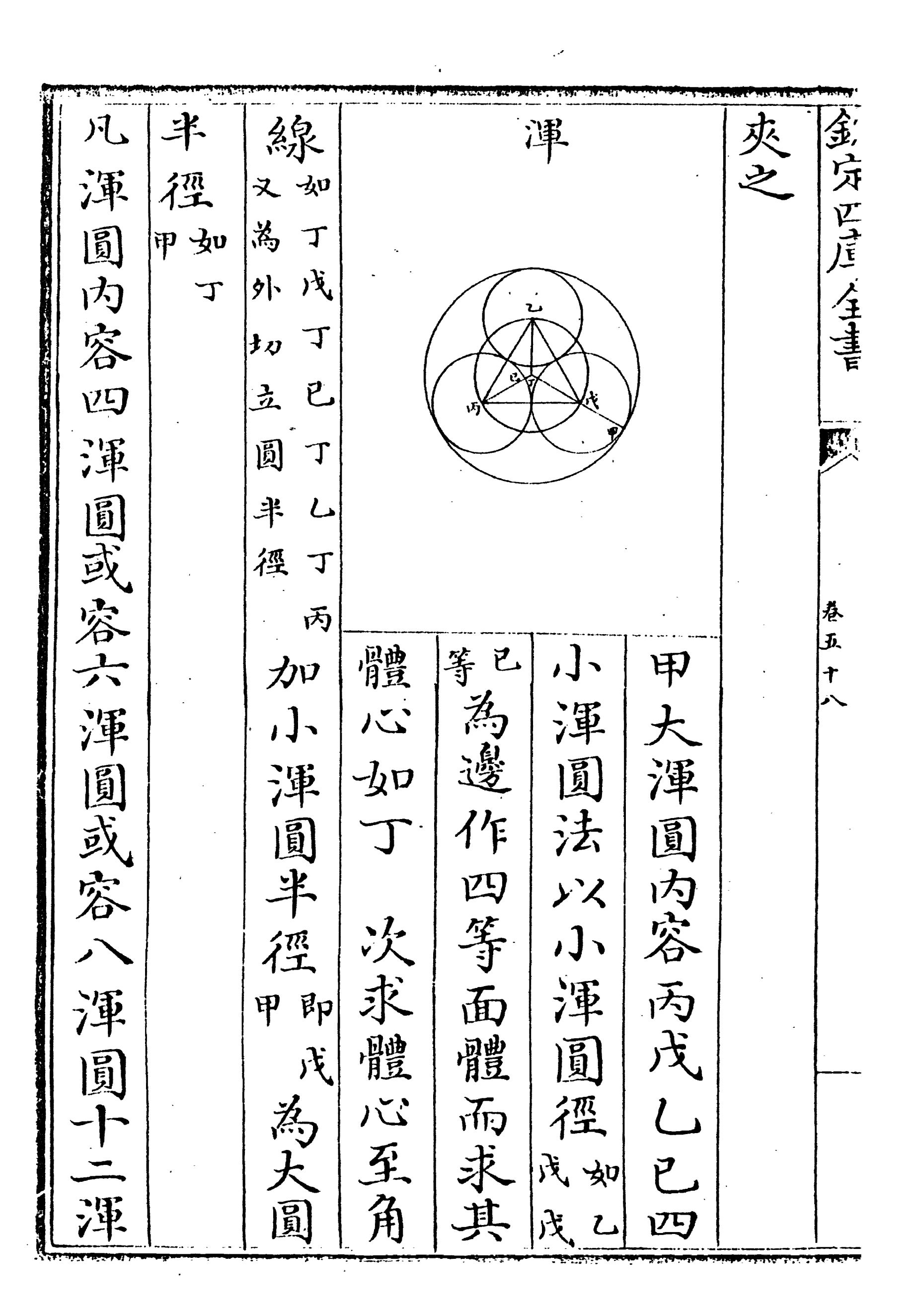
十二錐共積二十七萬四千五百九十六

孔林宗附記

方燈可名為二十四等邊體　圓燈可名為六十等邊體

四等面體又可變為十八等邊體為六邊之面四為三邊之面四凡十二角

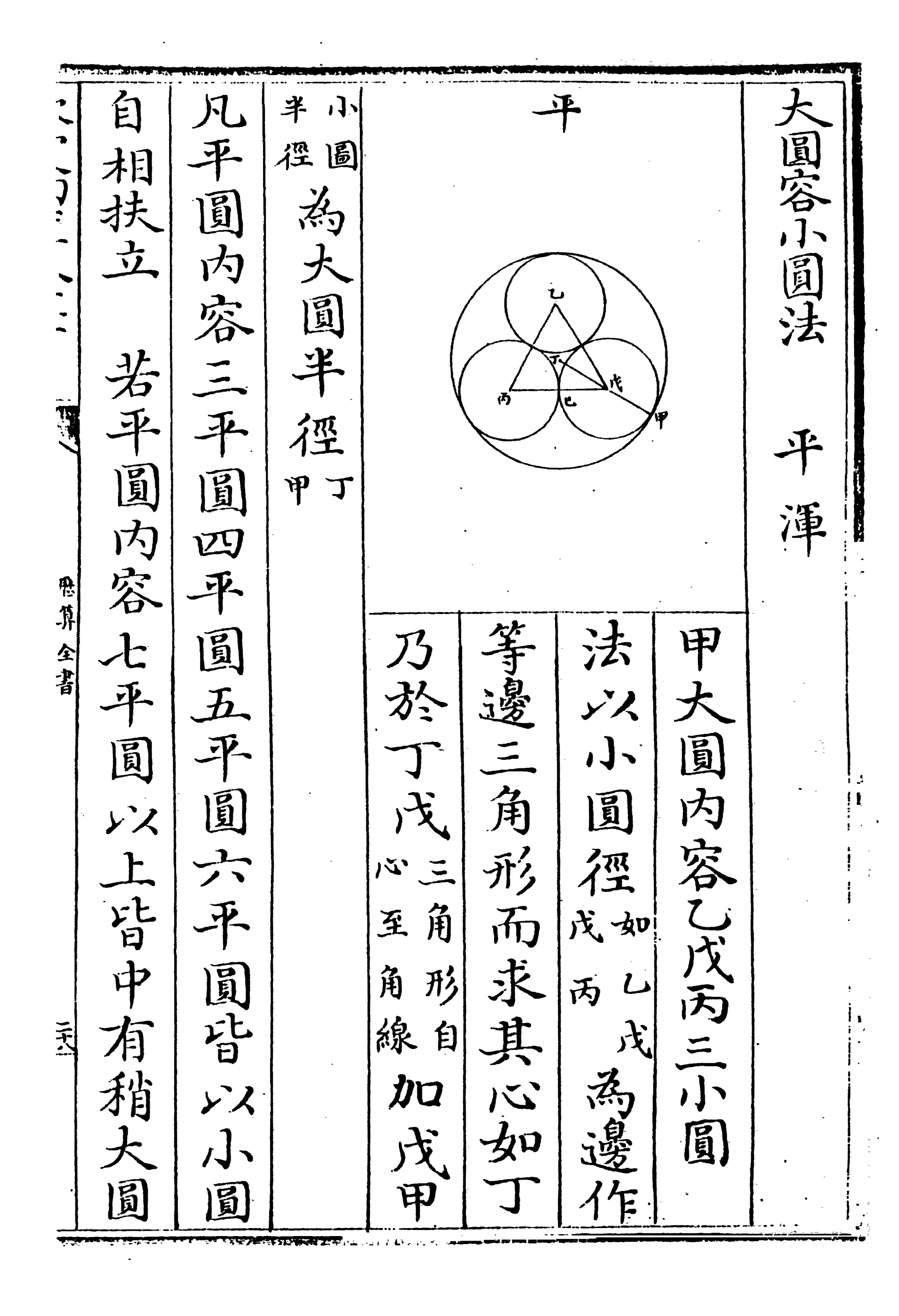
夾之



甲大渾圓內容丙戊乙巳四小渾圓法以小渾圓徑如乙戊戊巳等為邊作四等面體而求其體心如丁 次求體心至角線如丁戊丁巳丁乙丁丙又為外切立圓半徑加小渾圓半徑即戊甲為大圓半徑如丁甲

凡渾圓內容四渾圓或容六渾圓或容八渾圓十二渾

大圓容小圓法　平渾



甲大圓内容乙戊丙三小圓

法以小圓徑（如乙戊　戊丙）為邊作等邊三角形而求其心如丁

乃於丁戊（三角形自心至角線）加戊甲（小圓半徑）為大圓半徑（丁甲）

凡平圓内容三平圓四平圓五平圓六平圓皆以小圓自相扶立　若平圓内容七平圓以上皆中有稍大圓

一率　方斜併數　二四一四

二率　方根　一〇〇

三率　所設之渾圓半徑　丁甲

四率　所容之小圓半徑　乙甲

推此而知五等邊形於其鋭角為心半其邊為界作小圓而以五等邊之心至角如半邊以為半徑而作大圓則大圓容五小圓俱如上法

若六等邊於其鋭作小圓仍可於其心作圓共七小圓

圓皆直以小渾圓自相扶　若渾圓內二十渾圓則中多餘空必內有稍大渾圓夾之

平

甲大平圓內容乙戊丙己四小平圓法以小圓徑（如乙戊等）為邊作平方（如乙戊丙己方）而求其斜（如丁乙即方心至小圓心線）加小圓半徑（如乙甲）為大圓半徑（如丁甲）

若先有大圓（甲）而求所容小圓則以三率之比例求之

對面

之度（如丁乙等）加小圓半徑（如甲乙）為大渾圓半徑（如甲丁）

捷法以小渾圓徑為方（即乙巳乙丙）辛平方求其斜（如乙丁）加小圓半徑（如甲乙）為大圓半徑或以小渾圓徑自乘而倍之開方得根加小圓半徑為大圓半徑亦同

或先得大圓而求小圓徑則用比例

一率　方斜并　二四一四

何也六等面之邊與半徑等也其法只以小圓徑即六等邊

渾

渾 正面

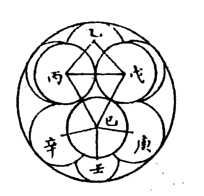
二分加一為大圓半徑

甲大渾圓內容乙丙等六小渾圓

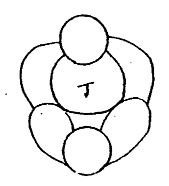
法以小渾圓之徑為邊作八等面虛體如乙巳丙辛戊皆小立圓之心聯為線則成八觚 乃求八等面心丁至角

渾

正面



對面



角即小圓心之線如乙丁加小圓半徑如甲乙為大圓半徑如甲丁

按體心至角線即二十等面外切圓半徑

二十等面之例邊一百即小渾圓例徑

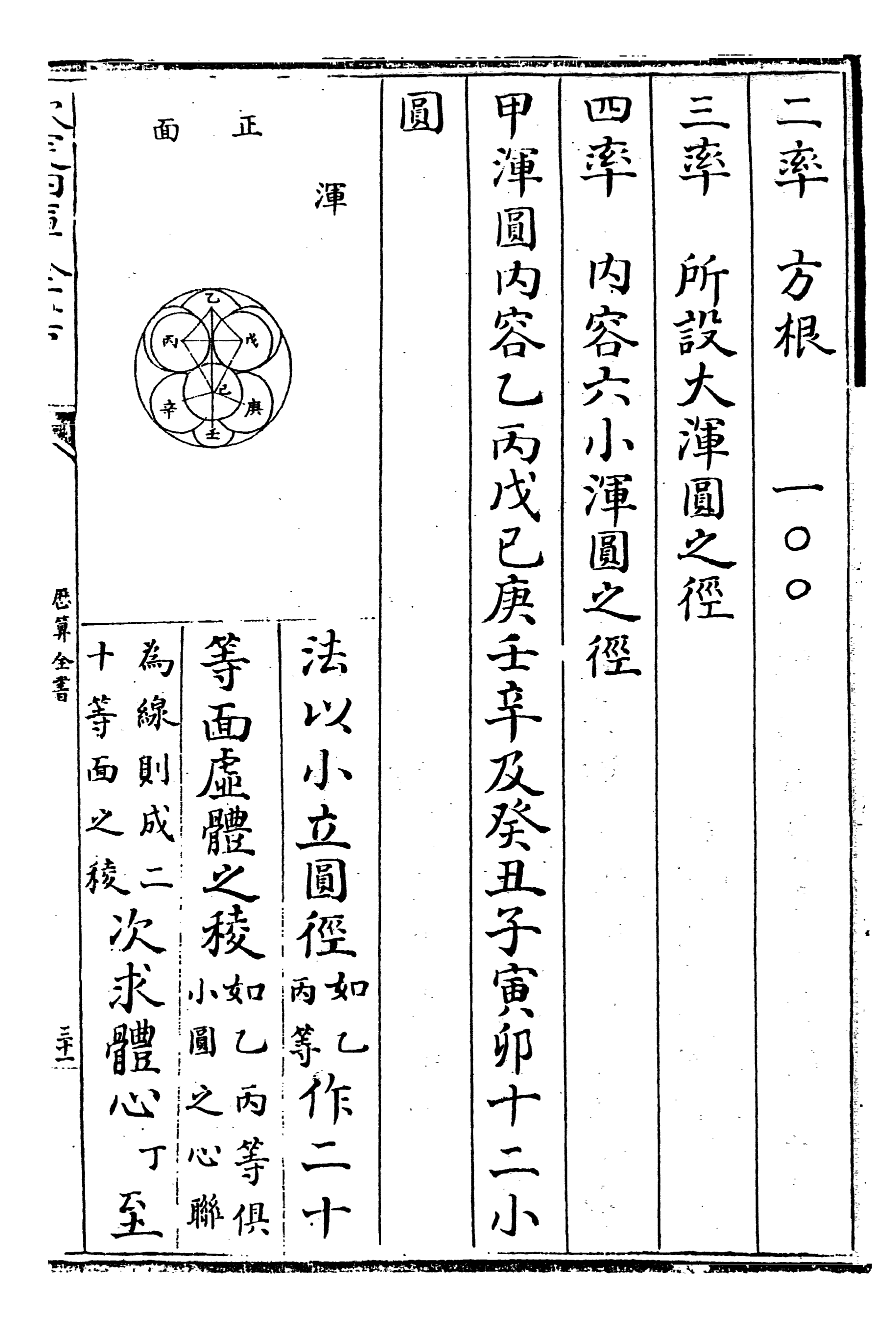
外切渾圓例徑二百八十八一三五五

二率　方根　一〇〇

三率　所設大渾圓之徑

四率　內容六小渾圓之徑

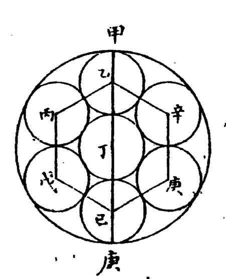
甲渾圓內容乙丙戊己庚壬辛及癸丑子寅卯十二小圓



法以小立圓徑（如乙丙等）作二十等面虛體之稜（如乙丙等俱小圓之心聯為線則成二十等面之稜）次求體心（丁）至

甲庚大平圓内容七小圓

平



法以甲庚圓徑取三之一如丁乙庚辛等爲小圓徑若容八圓以上則其數變矣假如以七小圓均布於大圓周之内而切於邊則中心一小圓必大於七小圓而後能相切以上倣此

二十等面邊一百者其外切渾圓徑一百八十八奇又加小渾例徑得此數

若先有大渾圓而求所容之十二小渾圓則以二率爲一率四率爲三率

一　外切渾圓之例徑二百八十八一三五五

二　二十等面之例邊一百卽小渾圓例徑

三　設渾圓之全徑一百

四　内容十二小渾圓之徑三十八六九四八其比例如全分與小分

圓在内乎

又二十等面有十二尖可作十二小圓以居大渾圓之内而為所容

又八等面有六尖可作六小圓為大渾圓所容　四等面有四尖可作四小圓

又方燈亦有十二尖可作十二小圓為大渾圓所容其中容空處仍容一小圓為十三小圓皆等徑也

十二等面有二十尖用為小渾圓之心可作二十小立

甲大渾圓內容八小立圓

渾

法以小圓徑作立方(如乙庚方)求其立方心至角數(即外切渾圓半徑如乙丁)再加小圓半徑(如甲乙)為大渾圓半徑(如甲丁)

按八小員半徑十(甲乙)則其全徑二十內斜線(乙丁)十七加(甲乙)共二十七內減小圓徑二十餘七倍之得十四是比小圓半徑為小其比例為十之七安得復容一稍大小

渾圓內容各種有法之體以查曲線弧面之細分

公法凡有法之體在渾圓體內其各尖必皆切於渾圓之面

凡渾圓面與內容有法體之尖相切成點皆可以入線知其弧度所當

內惟八等面皆以弧線十字相交為正角餘皆銳角其

十二等面則鈍角

十二等面每面五邊等析之從每面之角至心成平三

圓以切大渾圓內有稍大渾圓夾之
圓燈尖三十可作三十小球亦皆以內稍大渾圓夾之
公法皆以心至尖為小渾圓心距體心之度皆以小渾
圓徑為所作虛體邊
如作內容二十小渾圓聯其心成十二等面虛體
虛體之各邊皆如小渾圓徑也虛體之各尖距心皆等
此距心度以小渾圓半徑加之為外切之大渾圓半徑
以小渾圓半徑減之為內夾稍大渾圓半徑

渾體之弧面皆如其內切體等面之數之形

如四等面則其分為弧面者亦四而皆為三角弧面十二等面則亦分弧面為十二而皆成五邊弧形八等面則弧面亦分為八二十等面弧面亦分二十而皆為三角弧形內惟六等面為立方體所分弧面共六皆為四邊弧形

邊弧形

凡渾圓面上以內切兩點聯為線皆可以八線知其幾何長

角形五則輳心之角皆七十二度半之三十六度即甲心乙角其餘心乙甲角必五十四度倍之為甲乙丁角則百〇八度故為鈍角

凡渾圓面切點依內切各面之界聯為曲線以得所分

渾幂分為四即與渾圓中剖之平圓等幂矣
推此而知六等面分外切渾圓幂為六即各得中剖平
圓三之二
八等面分渾圓幂為八即各得中剖平圓之半幂
十二等面分渾圓幂為十二即各得中剖平圓三之一
二十等面分渾圓幂為二十即各得中剖平圓五之一
凡依等面切渾所剖之圓幂又細剖之皆可以知其分
幂

其法以各體心到角之線命為渾圓半徑以此半徑求其周作圈線即為圓渾體過極大圈以八線求兩點所當之度即知兩點間曲線之長

凡渾圓面以曲線為界分為若干相等之弧面即可以知所分弧面之冪積

假如四等面外切渾圓依切點聯為曲線分渾圓面為四則此四相等三角形弧面各與渾圓中剖之平圓面等冪何也渾圓全冪得渾體中剖平圓面之四倍令以

再剖則一剖為六為渾圓面冪二十四之一皆得十二等面所剖之半而邊不等若但一剖為二則得渾圓冪八之一與八等面所剖正等但八等面三邊等又三皆直角此則邊不等又非直角

甲
庚
丙
丁

甲
丙
巳
壬
辛
丁

假如八等面所剖為渾冪八之一若一剖為二則十六之一剖為四則三十二之一可以剖為六十四至四千九十

假如四等面所分為渾圓羃四之一而作三角弧面若中分其邊而會於中心則一又剖為三為渾圓羃十二之一與十二等面所分正等但十二等面所剖為三邊弧線等此所分為四邊弧線形如方勝而邊不等若自各角中會於心成三邊形其羃亦不等也

以平徑為兩弦以會於平圓之心則其冪為平圓四之一若渾體四面以腰圍九十度為底兩端各以曲線為兩弦以會於渾圓之極則其冪為平圓二之一矣

假如六等面即立方在渾圓内剖渾冪為六得渾冪六之一

六 若以三剖則渾羃二十四之一如十二等面之均剖亦如四等面之六剖也再細剖之可以剖為九十是依度剖也可以剖為五千四百則依分剖也再以秒微剖之可至無窮

惟八等面可以細細剖之者以腰圍為底而兩弦會於極其形皆相似故剖之可以不窮

又以此知曲面之容倍於平面何也八等面所剖之渾體腰圍即平圓周也以平圓周之九十度為底兩端皆

與八等面所剖為十五之一

假如二十等面剖渾冪為二十各得渾冪二十之一若一剖二則四十之一若一剖三則六十之一若一剖六則百二十之一皆與十二等面所剖之冪等而邊不必等也

凡球上所剖諸冪以為底直剖至球之中心成錐形即分球體為若干分

如四等面之冪得球冪四之一依其邊直剖至球心成

若一剖為二則與十二等面所剖等剖為四則二十四之一再剖則一為八而得四十八之一

假如十二等面剖渾羃為十二各得渾羃十二之一若剖一為五則得六十之一再剖一為十則得百二十之一而

三角錐其錐積亦為球體四之一推之盡然

得數平方開之得三等邊形之冪積

捷法不求中長線但以丁乙冪三因之與丁乙冪相乘開方得根即三等邊冪積　或用原邊丁甲自乘得數乃四分之取四之一與四之三相乘得數開方得三等邊積亦同

論曰邊與邊橫直相乘得積若邊之冪乘邊之冪亦必得積之冪矣故開方得積

法曰以原邊之冪三因四除之又以原邊之半乘之兩

幾何補編 補遺

平三角六邊形之比例

平三角等邊形

丙
甲 乙 丁

甲丁丙三邊等形其邊丁甲折半丁乙自乘而三之即為對角中長線冪開方得中長線丙乙既得中長線丙乙以乘丁乙半邊即等邊三角形積 若以丙乙冪丁乙冪相乘

三等邊形與所作正方形其積之比例若平積三與十六之平方根也即一七奇與四。

捷法於分面線上取三點為等邊三角形積其十六點即正方積　若以邊問積則以邊之方冪數於分面線之十六點為句置尺取三點之句即得三等邊積其設數得數並於平分線取之此用比例尺算

又法作癸卯辰半員辰癸為徑於徑上句分十七分而盡一端取其四分如丑癸丑癸為辰癸十七分之四則丑子為辰子十六分之三

次為實平方為法開之得三等邊形冪積

解曰原邊冪四之三即中長冪也半邊乘二次以冪乘也　又法以原邊與半邊冪相減相乘開方見積

平三角等邊形冪積自乘之冪與平方形冪積自乘之冪若三與十六理同前條

解曰甲戊庚丁為平方形丁丙甲為等邊三角形其邊同為甲丁題言丁甲線上所作

取子癸為卯子四之一又取丁子如癸子次以丁癸為半徑丁為心作半員截卯子於壬即得壬子為三等邊積

捷法不作辰子線但於子作半十字線如癸丁次於子點左右取癸取丁各為卯子四之一乃任以丁為心癸為界作割員分即割卯子於壬而為三等邊形之積

論曰此借用開平方法也平方求根有算法有量法此所用者量法也量法有二其一以兩方之邊當句當股

折半於丁以丁為心丁癸為半徑作癸壬丑小半員又以丁癸折半於子作卯子直線(與辰癸徑為十字垂線)割小員於壬則壬子與卯子之比例即三等邊冪與正方冪積比例

用法有三等邊形求積法以甲丁邊上方形(即庚甲)積作卯子直線如句四倍之作橫線如辰子為股次引橫線

徑一法倍容圓半徑即外切圓半徑

新增求六等邊法

法曰六等邊形者三等邊之六倍也以同邊者言用前法得三等邊積六因之即六等邊積

依前法邊上方冪與三等邊形冪若四〇與一七奇因顯邊上方冪與六等邊形冪若四〇與十〇二奇亦若一〇〇與二五五

今有六等邊形問積　法以六等邊形之一邊自乘得

而求其弦是為并方法也其一用半員取中比例此所

用者中比例也詳比例規解

附三等邊求容圓

法曰以原邊之冪十二除之為實平方開之得容圓半徑

解曰原邊冪十二之一即半邊三之一也

附三等邊形求外切圓

法曰以原邊之冪三除之為實平方開之得外切圓半

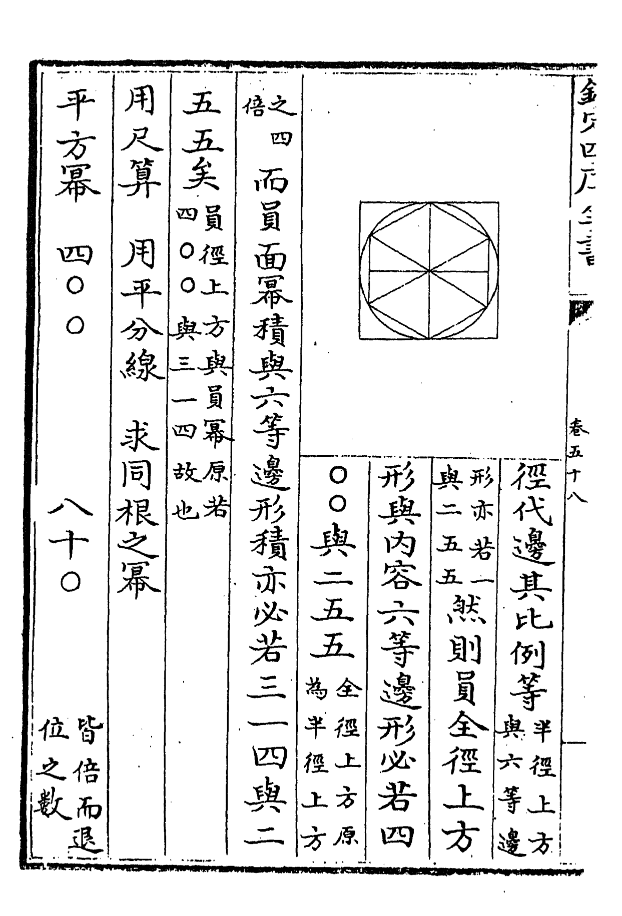
數再以二五五乘之降兩位見積

解曰置四〇與一〇二各以四除之則為一〇〇與二五五之比例也

若問員內容六等邊形者即用員半徑上方冪為實以二五五為法乘之得數降二位見積亦同降二位者一〇〇除也

依顯平員積與其內容六等邊形積之比例若三一四與二五五

論曰六等邊形之邊與外切員形之半徑同大故以半



徑代邊其比例等半徑上方與六等邊形亦若一與二五五然則圓全徑上方形與內容六等邊形必若四○○與二五五全徑上方原為半徑上方之四倍而圓面冪積與六等邊形積亦必若三一四與二五五矣圓徑上方與圓冪原若四○○與三一四故也

用尺算　用平分線　求同根之冪

平方冪　四○○　八十○皆倍而退位之數

平員羃　　三一四　約爲六十三弱實六二八

六等邊羃　二五五　五十一

三等邊羃　一七〇　三十四

右皆方内容員員内又容六角之比例其六等邊與員同徑乃對角之徑也於六等邊之邊則爲倍數三等邊則只用邊

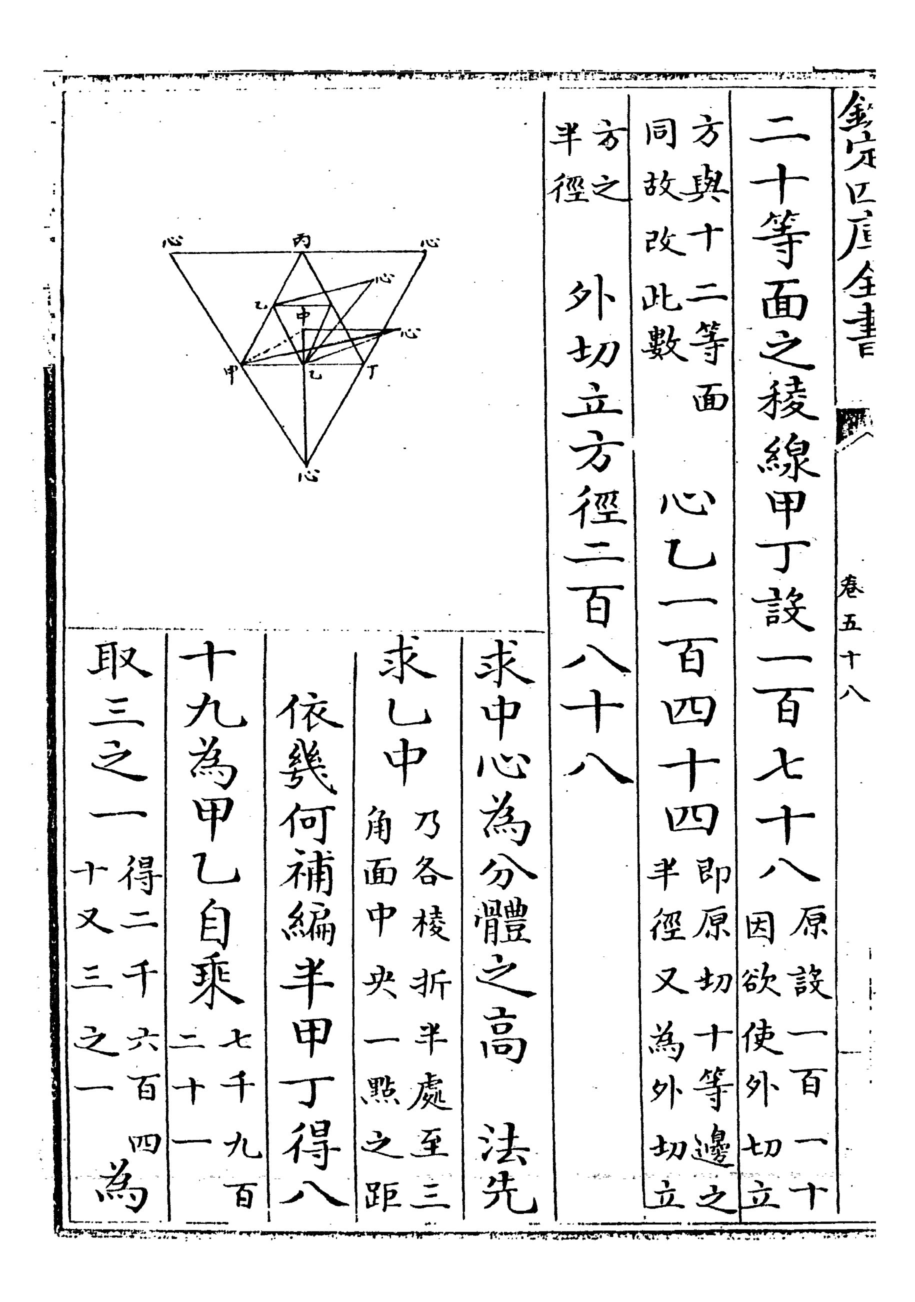
若六等邊形亦即用邊與平方平員之全徑相比則如後法

平方	四〇〇	平方	一〇〇〇〇
平員	三一四	平員	七八五四
六角	一〇二〇	六角	二五五〇〇
三角	一七〇	三角	四二五〇

論曰以平方平員之徑六角三角之邊並設二〇則爲平方四〇〇之比例若設一〇〇則如下方平方一〇〇〇〇之比例也

量體細法

二十等面之稜線甲丁設一百七十八（原設一百一十因欲使外切立方與十二等面同故改此數）心乙一百四十四（即原切十等邊之半徑又為外切立方之半徑）外切立方徑二百八十八



求中心為分體之高　法先求乙中（乃各稜折半處至三角面中央一點之距）依幾何補編半甲丁得八十九為甲乙自乘（七千九百二十一）取三之一（得二千六百四十又三之一）為

四等面體求積

法曰以原邊之冪三除之得數以乘邊冪得數副寘之又置邊冪二十四除之得數以乘副平方開之即四等面積也

又法置半邊冪三除之得數以乘半邊冪得數副寘之又以六為法除半邊冪得數為實平方開之即四等面積四分之一也即三角扁錐

算二十等面

或取理分中末線之大分如心乙為股小分如甲乙或丁乙為句取其弦甲心或丁心為二十等面自角至心之楞線合之成甲心丁形即二十等面分形之斜立面也甲丁則原形之楞也如甲心丁之面三皆以心角為宗以甲心等弦合之三面皆有此弦則甲丁等底三底並同甲丁以尖相遇而成三等邊之面即二十等面之一面也以此為底則成

乙中句冪又以心乙一四四自乘二〇七三六為弦冪相減餘一萬八千〇九十五又三之二為股冪開方得心中一百三十四半強為分體銳尖之高倍之得二百七十九半弱為內容立員徑

求甲心為分體斜稜　法以甲乙為句其冪七九二一以乙心為股其冪二〇七三六併之二八六五七為弦冪開方得甲心一百六十九二為分體自角至銳之斜稜　倍之三百三十八半弱為外切渾員之徑

簡法取乙甲即原楞之半又即小分自冪三之一以減乙心即大分又即原楞均半處至形心即斜立面中線之冪即心中冪

又解曰原以甲乙半楞又即二十等面中剖所成之楞即十等邊之一邊故為小分為句在形內為小分乃乙戊也今形外之甲乙與甲乙同大故亦為小分乙心即二十等面中切成十等邊自角至心之弦故為大分又即為二十尖錐各立面三角形之中長線為股則甲心為弦自各角至體心之線而甲心弦冪內有乙心股甲乙句兩冪今求心中之高則又以甲中為句自各角至各面心也而仍以甲心為弦弦冪內減甲中句冪則其餘心中股冪

三角尖錐矣　尖錐之立三角面皆等皆稍小於底

解曰乙戊與甲乙等丙甲心與戊心（即乙心）不等如弦與股（乙戊即十等邊之一邊乃二十等面橫切之面之邊）令欲求心中正立線中即二十等面一面之中自此至心成心中線則其正高也

法先求甲中為句取其冪以減甲心弦冪即心中股冪開方得心中

切立方之半徑再以大分為股乙心小分為句甲乙亦即甲戊亦即戊乙取其弦甲心即二十等面自各角至心之線謂之角半徑亦即切員半徑再以原楞甲丁為底切員半徑為兩弦甲心丁心及成兩等邊之三角形即二十等面體自各角依各楞線切至體心而成立錐體之一面三面盡如是則成三角立錐矣　如是作立錐形二十聚之成二十等面體

立錐體之中高線心中以乘三體面之冪而三除之得各錐積二十乘錐積得立積　其中高線心中即內容立員

也　依幾何補編甲乙冪三分加一為甲中冪故但於乙心冪內減去甲乙冪三分之一即成心中股冪

又解曰若以乙心為弦則中乙為句而心中為股依補編中乙冪為甲乙冪三分之一故直取去甲乙冪三之一為句冪以減心乙弦冪即得心中股冪開方得心中

此法尤捷

作法　以二十等面之楞（如甲丁）折半（如甲乙或丁乙亦即甲戊）為理分中末之小分求其大分（如乙心即二十等面各楞線當中一點至心之線亦即外

十二等面之一圖

分圖

九百二十一為股冪并二冪一萬〇九百四十六平方開之得弦一〇四又六二不盡約為一〇四半強為角至體心之線心甲即外切立員之半徑

算二十等面之楞於渾天度得幾何分

法以心甲為渾天半徑甲乙為正弦法為心甲與甲乙若

之半徑

立方內容二十等面體其根之比例若全分與大分

立方內容十二等面體其根之比例若全分與小分

二十等面體之分體並三楞錐以元體之面為底

原體之楞甲丁折半甲乙為小分為句取其大分心乙為股句

股求弦得自角至心為外切員之半徑心甲

假如甲丁原楞一百一十半之得甲乙半楞五十五自乘三千〇二十五為句冪其大分乙心即外切立方半徑八十九自乘七千

半徑與甲心乙角之正弦查正弦表得度倍之為丁甲通弦所當之度

算十二等面

五等邊面為十二等面之一　面有五邊在體之面則為五楞錐其一楞設一百一十甲丙半之五十五乙丙以甲丙為小分求其大分得一百七十八丙戊也即丙丁壬角為丙中甲角之半與丁壬戊丁平圓十等邊之一面等半之八十九巳丙也即乙辛以丙巳乙為兩腰等形辛巳乙亦兩腰等形故辛乙與巳丙等丙巳乙形與亢形丙戊甲形相似巳角即戊角丙乙丙為小分乙

已或辛乙為大分為內作小五等邊之一邊乙辛亦即十二等面從腰圍平切之十等邊面也

又以乙辛為小分求得大分一百四十四心乙也分圖辛心乙形即前圖辛心乙形乙辛為心壬之小分心乙為大分乙心線即五等面一邊折半處至體心之距丙點即五等面邊兩楞相湊之角乙丙辛虛線形即前圖乙丙辛形為甲丙半楞乙丙之全分何則

前圖之丙已乙形乙丙為小分丙已為大分試於辛乙心形內分圖作庚辛乙形與丙已乙形等庚乙即乙丙五等面一邊之半乙辛庚辛即丙已乙已為小五邊形之一邊則乙庚為小分乙辛為大分心庚同今又以乙

辛為小分求其大分壬癸而壬癸即心乙也（乙癸同）夫心乙乃庚乙（小分）辛乙（大分即心庚）之并則乙心為庚乙之全分矣其比例心乙與心庚若心庚與庚乙而乙心即外切立圓半徑也

右法楊作枚補

今求心中線為五等邊最中一點（中）至體心（心）之距亦即內容渾員半徑

先求乙中線為五等邊各楞折半處至最中之距　法

為甲乙比乙中若半徑與五十四度之切線

一 半徑 一〇〇〇〇〇

二 乙甲中角五十四度切線一三七六三八

三 半楞甲乙 五十五

四 中乙 七十五七〇

用句股法以心乙一百四十四為弦中乙七十五七為句句弦各自乘相減得心中股冪平方開之得中高線心中為容員半徑

求得容員半徑一百二十二半弱心中

十二等面之分體並五楞錐並以五等邊面為底原體之楞甲丙設一百一十半之乙甲五十五為小分求其全分乙心一百四十四（即外切立方半徑）乙甲五十五自乘三千〇二十五為句冪心乙一百四十四自乘二萬〇七百三十六為股冪并之得二萬三千七百六十一平方開之得弦一百五十四強為自角至心之線甲心即外切員半徑

五楞錐之一面

心

丙　乙　甲

作法　以五等面之一邊為底楞甲丙以外切員半徑角至心之

又求甲心線為各角至體心之距即外切渾員半徑用句股法以甲乙五五為句心乙一四四為股并句股冪求甲心弦

求得外切圓半徑一百五十四強甲心

十二等面根一一〇甲丙

外切立員半徑一四四心乙全徑二八八〇

內容渾員半徑一二二半心中全徑二四五弱

外切渾員半徑一五四甲心全徑三〇八強

線為兩弦之楞甲心及丙心而會於心五邊悉同則為十二分體之一如是十二枚則成十二等面體

變體數

求渾圓積

設渾圓徑一〇〇〇自乘得一〇〇〇〇〇〇又十一乘之得一一〇〇〇〇〇〇為實十四除之得〇七八五七一四為平圓面冪或用舊徑七圍念二之比例亦得圓面七八五七一四以四因之得渾圓之冪三一

四二八五六

置渾圓之羃以半徑五〇〇因之得一五七一四二八〇〇〇是為以渾圓面羃為底半徑為高之圓柱形積

置圓柱形積以三為法除之得五二三八〇九三三三是為以渾圓面羃為底半徑為高之圓角形積亦即渾圓之積

渾圓根一〇〇〇體積五二三八〇九三三三用為公積

立方

置公積即渾圓積五二三八〇九三三三立方開之得立方根八〇六二〇二七一七是為與渾圓等積之立方

方錐

置公積五二三八〇九三三三以三因之得數立方開之得高闊相等之方錐形根一一六二二四四四四七是為與渾圓等積之方錐

方

錐

圓柱

置公積（同上）十四因之十一除之為實立方開之得高濶相等之圓柱形根八七四二三九四二是為與渾圓之積之圓柱

圓柱

圓錐

置公積同前以三因之變圓錐形積為圓柱積再以十四因之十一除之為實變圓柱積為立方積立方開之得高濶相等之圓錐形根一二五九四七五九是為與渾圓等積之圓錐　或置積以四十二因之十一除之立方開之亦同

圓錐

按變體線本法有四等面八等面十二等面二十等面諸數表皆未及其同者惟有渾圓立方二形其餘三形

皆比例規解及測量全義之所未備令以法求之則皆長潤相等而不為渾圓立方者耳夫不為渾圓立方而仍可以法求者以其長濶相等則仍為有法之形也然而與今西書所載合者二不合者一意者其傳之有誤耶或其所用非徑七圍二十二之率耶俟攷

渾圓以徑求積

置徑自乘又以半徑乘之又四因之又以十一乘之以十四除之又以三除之見積

解曰平圓與平方之比例如其周與周假如七則方周二十八圓周二十二兩率各折半為十四與十一徑自乘則為平方形以十一乘十四除則平方變為平圓矣以平圓為底半徑乘之成圓柱形再以三歸之成圓角形即圓錐渾圓面冪為底半徑為高之角形四倍大於此圓角形故又四因之即成渾積也

捷法　徑自乘以乘半徑乃以四十四因四十二除見積　或徑上立方形二十二因四十二除或用半數十

一因二十二除見積並同

渾圓以積求徑

置積以三因之四除之又以十四因之十一除之再加一倍立方開之得圓徑

解曰圓積是圓角形四今三因之變為圓柱形四矣故用四除則成一圓柱此圓柱形是半徑為高全徑之平圓為底今以十四乘十一除則變為全徑之平方為底半徑為高矣故加一倍即成全徑之立方

捷法　積倍之以四十二因四十四除立方開之得圓徑　或用本積以八十四乘四十四除立方開之　或用半數以四十二乘二十二除立方開之　或又折半以二十一乘乘十一除立方開之得積並同

按徑七圍二十二者乃祖冲之古法至今西人用之可見其立法之善雖異域有同情也雖其於真圓之數似尚有盈朒然所差在微忽之間而已吾及錫山楊崑生柘城孔林宗另有法其所得之周俱小於徑七圍二十

二之率則其所得圓積亦必小於古率矣

楊法立圓徑一〇〇〇〇積五二三八〇九二五六四

孔法立圓徑一〇〇〇〇積五二三五九八七七五

約法

立方與立圓之比例若二十一與十一　平圓與外方若十一與十四　平圓與内方若十一與七

圓内容方之餘即四小弧矢形若七與四圓外餘方即四角減弧矢若十一與三准此則餘圓即小弧矢與餘方若四與三而小弧

矣與其所減之餘方角若一與七五亦若四與三也

歴算全書卷五十八